

**8.3. Distribuzione normale (o gaussiana).** La *funzione di distribuzione normale* (o *gaussiana*) ([2], p. 78) ha equazione

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

nel caso in cui la distribuzione sia centrata su 0, mentre nel caso generale di centratura in  $\mu \in \mathbb{R}$  si modifica in

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ per } \sigma > 0, -\infty < \mu < \infty, -\infty < x < \infty$$

Il parametro  $\sigma$  si dice *deviazione standard* ed è una misura dell'incertezza del fenomeno, mentre il parametro  $\sigma^2$  si dice *varianza*.

Una rappresentazione di distribuzione gaussiana nell'intervallo  $[-3, 3]$  è nella figura 2.

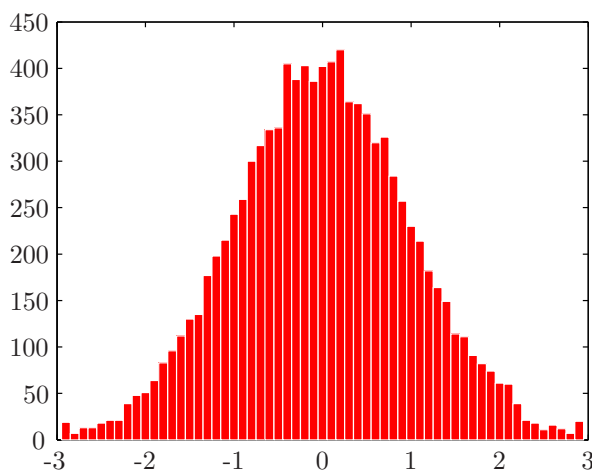


FIGURA 2. Distribuzione gaussiana in  $[-3, 3]$ .

**8.4. Stocasticità ambientale.** Applichiamo adesso le considerazioni sulla probabilità a un sistema dinamico, ponendo l'attenzione su un *sistema dinamico stocastico*, per il quale si distinguono due tipi di stocasticità: quella ambientale (che tiene conto del verificarsi di calamità naturali e di eventi straordinari legati all'ambiente circostante) e quella demografica, che esprime le variazioni risultanti da piccoli cambiamenti nel comportamento o nella struttura delle popolazioni (cfr. [1], p. 70). Soffermiamoci sull'equazione logistica

$$x(n+1) = x(n) + r \left( 1 - \frac{x(n)}{K} \right) x(n)$$

e poniamoci nel caso della stocasticità ambientale. Supponiamo che  $K$  e  $r$  che compaiono nell'equazione non siano più delle costanti, ma delle funzioni, e in particolare delle variabili aleatorie — dette *variabili aleatorie di Bernoulli* — così definite:

$$K = \begin{cases} K_1 & \text{in condizioni normali, cioè per } 1-p \\ K_2 & \text{se accade una catastrofe con probabilità } p \end{cases}$$

e analogamente

$$r = \begin{cases} r_1 & \text{in condizioni normali, cioè per } 1 - p \\ r_2 & \text{se accade una catastrofe con probabilità } p \end{cases}$$

Nel caso semplice in cui i due eventi (la catastrofe si è verificata o meno) siano equiprobabili, cioè se  $p = 1/2$ , si ha uno schema simile

$$x(1) = x_0 \quad \text{condizioni iniziali}$$

$$x(2) = \begin{cases} x(1) + r_1 \left(1 - \frac{x(1)}{K_1}\right) x(1) & \text{se la catastrofe non è accaduta} \\ x(1) + r_2 \left(1 - \frac{x(1)}{K_2}\right) x(1) & \text{se la catastrofe è accaduta} \end{cases}$$

Il codice Matlab corrispondente è il seguente:

```
for n=2:numerosimulazioni
    a=rand;
    if a<p
        x(n+1)=x(n)+r1*((1-x(n))/K1)*x(n)
    else
        x(n+1)=x(n)+r2*((1-x(n))/K2)*x(n)
    end
end
```

**8.5. Stocasticità demografica.** Consideriamo ancora l'equazione logistica

$$x(n+1) = x(n) + r \left(1 - \frac{x(n)}{K}\right) x(n)$$

nel caso della stocasticità demografica; questa volta  $r$  e  $K$  sono variabili aleatorie distribuite gaussianamente, con  $r$  centrata in  $r_0$  e deviazione standard  $\sigma_r$  e  $K$  centrata in  $K_0$  e deviazione standard  $\sigma_K$ .

Il motivo per cui nella stocasticità demografica si considerano variabili aleatorie distribuite uniformemente è la rilevanza, al fine dell'influenza sulla popolazione, di fattori come piccoli cambiamenti dell'ambiente o il numero di femmine fertili, che non procurano grandi deviazioni.

Il codice Matlab è

```
for n=2:numerosimulazioni
    r=rzero+rzero*randn;
    K=Kzero+Kzero*randn;
    x(n+1)=x(n)+r*((1-x(n))/K)*x(n)
end
```

## 9. Popolazione umana e matrici di Leslie

Nel modello in oggetto si considerano — al fine di determinare l'andamento della popolazione umana — solo le donne in età fertile (supponendo per semplicità che questa cessi a 45 anni), divise in tre fasce d'età: da 0 a 15, da 15 a 30 e da 30 a 45 anni.

Indichiamo con  $b_i$  il tasso di nascita della fascia  $i$  e con  $s_{ij}$  il tasso di sopravvivenza delle donne dalla fascia  $i$  alla fascia  $j$ ; possiamo considerare ad esempio i valori

$$b_1 = 0.4271$$

$$b_2 = 0.8498$$

$$b_3 = 0.1273$$

$$s_{12} = 0.9924$$

$$s_{23} = 0.9826$$

Con  $x_i(n)$  indichiamo la popolazione dell' $i$ -esima fascia d'età al passo  $n$ ; in questa situazione  $n = 1$  corrisponde ai primi 15 anni,  $n = 2$  a ulteriori 15 anni (quindi 30 anni) e così via di seguito. Potremo quindi scrivere le equazioni

$$x_1(n+1) = 0.4271x_1(n) + 0.8498x_2(n) + 0.1273x_3(n) \quad (9.1)$$

$$x_2(n+1) = 0.9924x_1(n) \quad (9.2)$$

$$x_3(n+1) = 0.9826x_2(n) \quad (9.3)$$

Mostreremo che il tasso globale di crescita di questa popolazione sarà un autovalore e le proporzioni che lo stabilizzano un autovettore.

Definiamo adesso il *vettore di distribuzione della popolazione in fasce d'età*

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}$$

e il suo valore iniziale

$$X(0) = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

ricordando di aver supposto inizialmente di trattare una popolazione di 90 milioni di donne uniformemente distribuite nelle tre classi d'età.

Osservando il sistema con le equazioni (9.1), (9.2) e (9.3), definiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.4271 & 0.8498 & 0.1273 \\ 0.9924 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9826 & 0 \end{pmatrix}$$

che ci permette di scrivere il sistema con (9.1), (9.2) e (9.3) in forma matriciale come

$$X(n+1) = AX(n)$$

quindi una forma che richiama l'equazione  $x(n+1) = ax(n)$ ; possiamo quindi scrivere

$$X(1) = AX(0)$$

$$X(2) = AX(1) = A^2X(0)$$

...

$$X(n+1) = A^nX(0)$$

In generale, una matrice

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

si dice *matrice di Leslie*. Un *autovettore* di una matrice  $A$  di ordine  $n$  è un vettore  $V$  non nullo tale che esista uno scalare  $\lambda$  per cui valga l'equazione

$$AV = \lambda V$$

e lo scalare  $\lambda$  si dice *autovalore* associato all'autovettore  $V$ .

Supponiamo ora che  $A$  abbia  $n$  autovettori distinti; in tal caso ogni vettore  $X$  può essere espresso come combinazione lineare degli  $n$  autovettori; ad esempio, il vettore  $X(0)$  può essere scritto come

$$X(0) = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_n V_n$$

e, poiché  $V_i$  è un autovettore, si ha

$$AV_i = \lambda V_i$$

e per  $t$  intero positivo

$$A^t V_i = \lambda_i^t V_i$$

quindi

$$X(t) = A^t X(0)$$

e di conseguenza

$$X(t) = c_1 \lambda_1^t V_1 + \dots + c_n \lambda_n^t V_n \quad (9.4)$$

Dall'equazione (9.4) osserviamo che l'effetto di ogni autovettore sulla somma è determinato dal corrispondente autovalore e si hanno i seguenti casi:

- se  $\lambda_i > 1$ , allora  $\lambda_i^t$  cresce esponenzialmente a  $+\infty$ ;
- se  $\lambda_i = 1$ , allora  $\lambda_i^t = 1$ ;
- se  $0 < \lambda_i < 1$ , allora  $\lambda_i^t$  decresce esponenzialmente tendendo a zero;
- se  $\lambda_i < 0$ , allora  $\lambda_i^t$  oscilla tra valori positivi e negativi (tra  $-1$  e  $1$ ), crescendo se  $\lambda_i < -1$  (oscillazioni forzate) e decrescendo (oscillazioni smorzate) se  $\lambda_i > -1$ .

Se  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , l'espressione  $\lambda_i^t$  oscilla crescendo se  $|\lambda_i| > 1$  e decrescendo se  $|\lambda_i| < 1$ .

Soffermiamoci adesso sul comportamento asintotico del vettore  $X(t)$ , riducendoci, per semplicità, a  $x(t) = a^t$  e  $y(t) = b^t$ . È noto dall'analisi che se  $|a| \geq |b|$ , allora il grafico di  $x(t)$  domina su quello di  $y(t)$  e questo è così forte che la funzione  $f(t) = a^t + b^t$  risulti indistinguibile da  $x(t) = a^t$ . Facendo riferimento all'uguaglianza (9.4), deduciamo che a "vincere" è l'autovalore  $\lambda_d$  maggiore in valore assoluto (o in modulo, se complesso), che corrisponde all'*autovettore dominante*. Il vettore  $\frac{X(t)}{\lambda_d^t}$  converge quindi all'autovettore associato a  $\lambda_d$ .