CAPITOLO

2

Metodi Runge–Kutta

2.1 Quadratura

La soluzione esatta dell'equazione differenziale

$$y' = f(t), t \geq t_0, y(t_0) = y_0$$

in cui il secondo membro è indipendente da y, è $y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$. Poiché vi sono metodi molto potenti per calcolare numericamente gli integrali, è naturale utilizzarli nella soluzione numerica di ODE generiche

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}), t \geq t_0, \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{2.1}$$

e questo è il fondamento logico alla base dei metodi *Runge–Kutta*.
Prima di parlare dei metodi Runge-Kutta, soffermiamoci sui metodi per il calcolo numerico di integrali. È usuale sostituire l'integrale con una somma finita mediante l'uso di una procedura denominata *quadratura*. Sia, in particolare, ω una funzione non negativa definita sull'intervallo (a, b), tale che

$$0 < \int_a^b \omega(\tau)d\tau < \infty, \left|\int_a^b \tau^j \omega(\tau)d\tau\right| < \infty, j = 1, 2, \ldots;$$

ω si dice *funzione peso*. Approssimiamo come segue:

$$\int_a^b f(\tau)\omega(\tau)d\tau \approx \sum_{j=1}^{\nu} b_j f(c_j), \tag{2.2}$$